



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Вдовина, Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии, *Известия вузов. ПНД*, 2020, том 28, выпуск 1, 8–28

DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 89.218.177.218

22 апреля 2024 г., 10:59:46





Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии

Г. М. Вдовина

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
АО «НПП «Алмаз»
Россия, 410033 Саратов, Панфилова, 1
E-mail: vdovinagm@gmail.com

*Поступила в редакцию 9.11.2019, принята к публикации 19.12.2019,
опубликована 26.02.2020*

Цель работы состоит в обобщении результатов применения методов фрактальной геометрии в различных радиофизических системах и исследования процессов, происходящих в них. **Методы.** Изложение построено в виде краткого обзора ряда работ, посвященных новым методам генерации, приёма и передачи сигналов различных диапазонов частот, в том числе сверхвысокочастотных сигналов, с использованием подходов фрактальной геометрии. При этом целесообразным было привести примеры построения таких классических фракталов, как кривая Пеано, «салфетка» и «ковёр» Серпинского, кривая Коха и др., и указать размерность Хаусдорфа для них. Идея построения указанных фрактальных кривых и объектов с некоторыми модификациями лежит в основе создания реальных физических систем. **Результаты.** Проведённый обзор показал, что фрактальные объекты активно применяются при конструировании фрактальных антенн, фрактальных резонаторов и фильтров, построенных на их основе. Также учёт фрактальной поверхности катода даёт определённые преимущества и объясняет некоторые экспериментальные результаты. Указаны и некоторые другие области применения фракталов, где важную роль играет сложность пространственных или временных структур на разных масштабах. Следует отметить, что искусственно созданные элементы, о которых идёт речь, обладают самоподобием лишь в определённой степени и в некотором масштабе, представляя собой несколько первых итераций построения фрактальных кривых. В связи с этим они являются квазифрактальными или префрактальными объектами. **Заключение.** Формирование фрактального мышления и фрактальный взгляд на мир в целом позволили использовать принципы самоподобия при анализе работы и конструировании устройств. Очевидными преимуществами оказались возможное уменьшение габаритов, расширение частотного диапазона устройства и т.п.

Ключевые слова: фрактал, размерность Хаусдорфа–Безиковича, фрактальные антенны, фрактальные резонаторы, фрактальные катоды.

Образец цитирования: Вдовина Г.М. Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 8–28. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-02-00666.

A brief review of the research results of new methods for generating, transmitting and receiving oscillations and waves based on fractal geometry methods

G. M. Vdovina

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, Saratov 410012, Russia
JSC «SPE «Almaz»
1, Panfilova, Saratov 410033, Russia
E-mail: vdovinagm@gmail.com

Received 9.11.2019, accepted 19.12.2019, published 26.02.2020

Purpose of this article is to generalize results of the application of fractal geometry methods in various radiophysical systems and at study of processes occurring in them. **Methods.** The presentation is built in the form of a brief review of a number of works devoted to new methods for generating, receiving and transmitting signals of various frequency ranges, including microwave frequencies, using fractal geometry approaches. At the same time, it was advisable to give examples of constructing such classical fractals as the Peano curve, Sierpinski triangle and Sierpinski carpet, Koch curve, etc., and indicate the Hausdorff dimension for them. The idea of constructing these fractal curves and objects with some modifications underlies the creation of real physical systems. **Results.** The review showed that fractal objects are actively used in the design of fractal antennas, fractal resonators and filters built on their basis. Taking into account the fractal surface of the cathode also gives certain advantages and explains some experimental results. Some other fields of application of fractals are indicated, where the complexity of spatial or temporal structures at different scales plays an important role. It should be noted that the artificially created elements in question are self-similar only to a certain extent, representing the first few iterations of constructing fractal curves. In this regard, they are called as quasi-fractal or prefractal objects. **Conclusion.** Formation of fractal thinking and the fractal view of the world as a whole made it possible to use the principles of self-similarity in the analysis of work and the design of devices. The obvious advantages were a possible reduction in size, the expansion of the frequency range of the device, etc.

Key words: fractal, Hausdorff–Besicovitch dimension, fractal antennas, fractal resonators, fractal cathodes.

Reference: Vdovina G.M. A brief review of the research results of new methods for generating, transmitting and receiving oscillations and waves based on fractal geometry methods. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 8–28. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant no. 18-02-00666.

Введение

Предпосылки зарождения фрактальной геометрии как целого направления, сформировавшегося в конце XX века, по сути, связаны с работами французских математиков Гастона Мариса Жюлиа [1] и Пьера Жозе Луи Фату [2]. В их трудах заложены теоретические основы по итерационному исчислению рациональных функций на комплексной плоскости. Конечно, в те времена не было возможности визуализировать результаты их исчислений, и, следует отметить, указанные работы мало интересовали современников Фату и Жюлиа. Однако их труды послужили серьезным толчком к открытию множества, известного сегодня как множество Мандельброта. Как известно, сам Бенуа Мандельброт впервые ввёл термин «фрактал» в 1975 г. [3]. С работами предшественников он познакомился задолго до этого, но только с появлением компьютеров ему удалось получить графическое изображение этого множества, которое сегодня является символом фрактальной геометрии (см., например, [4–7]).

Интересно, что Мандельброт занимался исследованием ошибок, которые «возникали при передаче компьютерной информации» [8]. Он пришёл к выводу, что ошибки появлялись не ха-

отично, образуя кластеры, каждый из которых состоял из своих кластеров и т.д. И тогда фрактал сочли лишь следствием компьютерной обработки чисел.

Значительный вклад в становление и развитие фрактальной геометрии внесли и Льюис Фрай Ричардсон, который занимался исследованием длин побережья и границ государств, и Феликс Хаусдорф и Абрам Самойлович Безикович, чьи имена связаны с фрактальной размерностью.

Особенностью фрактальных структур является самоподобие, и именно это свойство приближает их к природным объектам, для описания которых непригодны классические фигуры евклидовой геометрии. «Облака – не сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, древесная кора не гладкая, молния распространяется не по прямой, – писал Мандельброт в 1975 году» [9]. Причём фрактальность может наблюдаться не только пространственная, но и временная. «Фракталы были чужды уютному евклидовому миру с его регулярными структурами» [10].

Формирование фрактального мышления и фрактальный взгляд на мир в дальнейшем повлияли на различные области и сферы деятельности человека.

Долгое время авторы статей и книг о фракталах занимались различными способами их построения, восхищались их красотой, находили их в произведениях искусства и литературы, использовали их при сжатии изображений, при создании музыки из розового шума и многого другого [11], а также для исследования природных объектов и закономерностей, проявляющих характерные черты самоподобия. Со временем исследователи перешли к созданию искусственных фрактальных структур с последующим их применением в различных технологических устройствах, в том числе радиофизических системах.

В работе представлен краткий обзор применения фрактальной геометрии и самих фрактальных объектов при конструировании радиофизических устройств и исследовании процессов, происходящих в таких системах. Конечно, следует уточнить, что при создании искусственных фракталоподобных элементов речь идёт всё же о квазифрактальных структурах, которые обладают самоподобием лишь в определённой степени и только в некотором масштабе.

1. Фрактальная размерность и некоторые примеры фрактальных фигур

Как известно, для описания фрактальных множеств привычное понятие размерности (1, 2 и т.д.) оказывается непригодным. И для таких объектов была введена специальная характеристика. В книге [12] на стр. 89 отмечено, что понятие размерности Хаусдорфа «...расширило классическое понятие размерности и позволило создать более точную классификацию геометрических объектов. Так, фракталы, в высшей степени запутанные объекты..., определяются как множества, размерность Хаусдорфа¹ для которых не является натуральным числом».

Хаусдорф привёл строгое определение, требующее серьёзных знаний математики (см., например, [3–5]). Согласно той же книге [12] (стр. 79–80), альтернативное определение размерности Хаусдорфа–Безиковича ввели русские математики Лев Понтрягин и Лев Шнирельман.

Следуя изложению автора книги [12] для конкретного примера расчёта размерности Хаусдорфа–Безиковича плоской фигуры F , вписанной в квадрат, необходимо разделить сторону квадрата на « n » частей и покрыть фигуру F мелкими квадратами. Пусть их будет n_F . Предположим, что F – квадрат целиком. Тогда при делении квадрата на « n » равных частей получим n^2 мелких

¹В литературе, как правило, данный вид размерности носит название «размерность Хаусдорфа–Безиковича»: понятие такой размерности ввёл Феликс Хаусдорф, а Абрам Самойлович Безикович продолжил его исследования.

квадратов. Показатель степени 2 и есть размерность квадрата. Вернёмся к фигуре F . «Адекватное» в терминологии [12] сравнение числа n_F с числом частей n , на которое разделили сторону квадрата, означает степень n , соответствующую числу n_F . Действительно, для квадрата с $n_F = n^2$, соответствующей степенью будет 2; в случае с диагональю – 1, поскольку $n_F = n^1$. Тогда n , n_F и d – показатель степени будут связаны соотношением $n_F = n^d$, откуда можно выразить d в виде

$$d = \frac{\ln n_F}{\ln n}.$$

Чем больше n , тем ближе число d к размерности Хаусдорфа–Безиковича D , то есть

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(n)}{\ln n},$$

где $N(n)$ – число мелких (бесконечно малых) квадратиков.

На самом деле размерность Хаусдорфа не является единственной характеристикой, которую можно использовать для описания фрактальных объектов. Таковыми являются также размерности Реньи, Минковского и др. (см., например, [4, 10, 13–15]). С математическим определением топологической размерности можно ознакомиться, например, в монографии [13].

Ю.А. Данилов заметил, что «...в большинстве эмпирических формул, в изобилии встречающихся в любом инженерном справочнике, показатели степеней в различных зависимостях такие некрасивые, то есть выражаются необъяснимо странными с точки зрения традиционной физики дробными числами типа 1.1378... или 2.9315...» [16]. В качестве ответа он предположил, что, возможно, «при разрешениях, достижимых в технике, в игру вступает фрактальность среды, поверхности и т.д., не принимавшаяся во внимание физиками, но вполне ощутимая на эмпирическом уровне для инженеров».

Существует множество фрактальных геометрических фигур и объектов, построение которых подробно описано в литературе (см., например, [4, 15]). В указанных работах можно ознакомиться и с подробным описанием расчёта фрактальной размерности каждой из фигур. Выделим некоторые из них.

Ещё в 1890 году Джузеппе Пеано предложил первый вариант построения самоподобной кривой [17, 18], которая полностью может заполнить квадрат, обегая все его точки (рис. 1). Следует отметить, что для представленной кривой Пеано топологическая и фрактальная размерности совпадают $D = D_T = 2$.

Кривая Гильберта предложена, как один из вариантов построения кривой Пеано. Описана она немецким математиком Давидом Гильбертом в 1891 году [19].

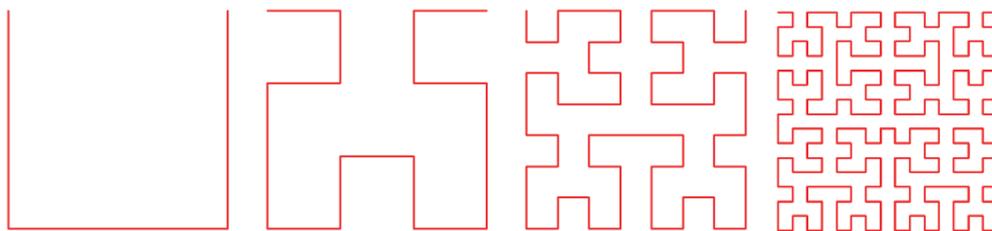


Рис. 1. Первые четыре итерации построения кривой Пеано

Fig. 1. First four iterations of constructing the Peano curve

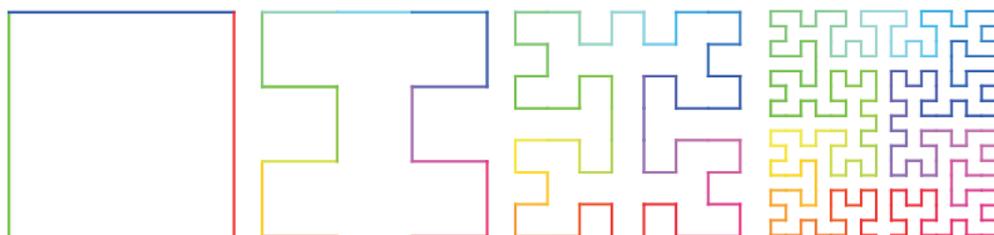


Рис. 2. Первые три итерации построения кривой Мура
 Fig. 2. First three iterations of constructing the Moore curve

Американский математик Элиаким Гастингс Мур исследовал замкнутую кривую, объединяющую изначально четыре копии кривых Гильберта [20], названную впоследствии кривой Мура (рис. 2).

Кривая Коха или триада Коха (состоящая из трёх соединённых кривых), названная в честь открывшего её в 1906 году шведского математика Нильса фон Коха [21], представлена на рис. 3. Для неё рассчитанная размерность Хаусдорфа–Безиковича составляет $D \approx 1.2628$.

Интересная иллюстрация бесконечной длины кривой Коха приведена в [12] на стр. 83–84: «Теперь представьте себе, что кривая Коха – дорога... Любой участок кривой Коха имеет бесконечно большую длину – она содержит так много поворотов, что проехать по ней от начала до конца невозможно... Похожими свойствами обладает дорога, проходящая вдоль побережья Галисии в Испании. Расстояние, отделяющее устье реки Миньо и мыс Эстака-де-Барес, по прямой составляет чуть больше 200 километров. Но попытайтесь проделать этот путь, следуя вдоль побережья, и он покажется вам бесконечным: автомагистраль будет петлять вдоль каждой реки, идти в объезд всех гор, мысов и заливов. Десять километров, разделяющие устье реки и мыс, превращаются в сто и даже больше, и путь кажется бесконечным. Именно это (пусть и в несколько преувеличенном виде) произойдёт, если мы попытаемся проехать вдоль кривой Коха».

Известны также «салфетка» и «ковёр» (рис. 4, *a* и 4, *b*), представленные польским математиком Вацлавом Серпинским [22], которые могут быть перенесены на объёмные тела. Австрий-

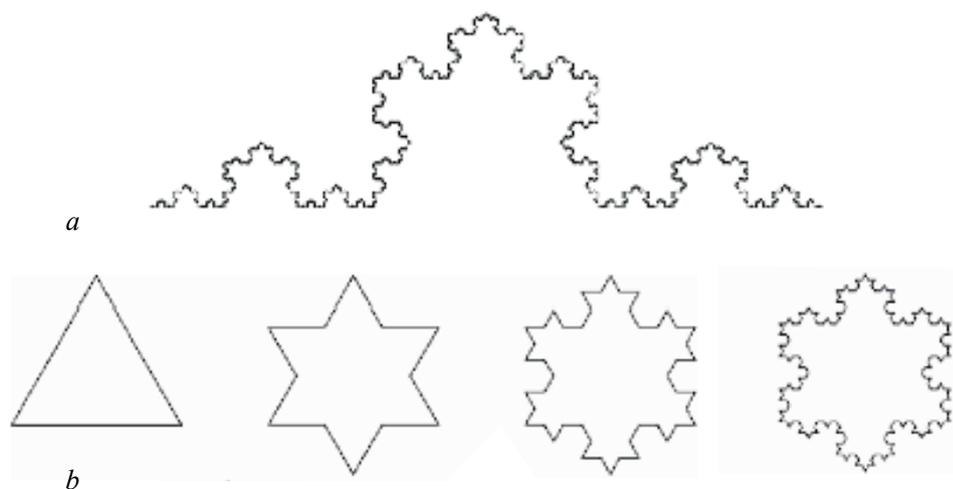


Рис. 3. *a* – Кривая Коха; *b* – первые четыре этапа построения триады Коха
 Fig. 3. *a* – Koch curve; *b* – first four iterations of constructing the Koch snowflake

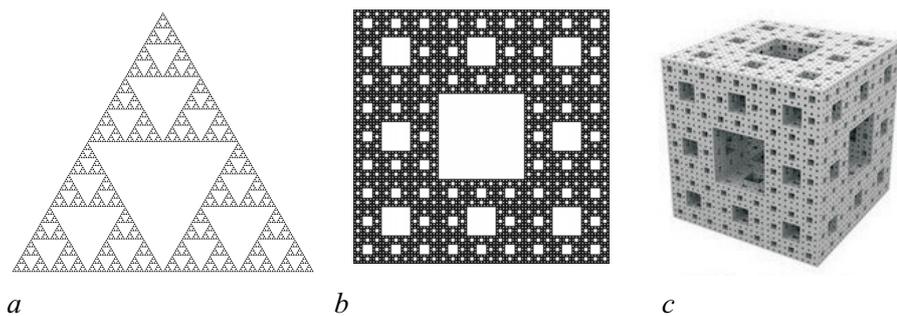


Рис. 4. *a* – Салфетка Серпинского; *b* – ковер Серпинского; *c* – губка Менгера
 Fig. 4. *a* – Sierpinski triangle; *b* – Sierpinski carpet; *c* – Menger sponge

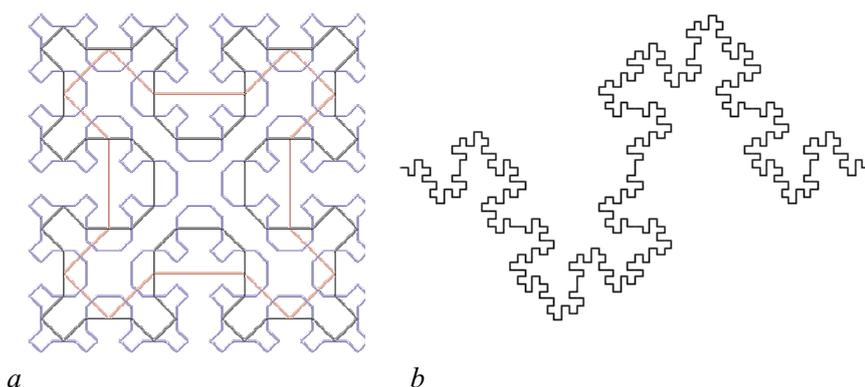


Рис. 5. *a* – Кривая Серпинского; *b* – кривая Минковского
 Fig. 5. *a* – Sierpinski curve; *b* – Minkowski curve

ский математик Менгер предложил объёмный аналог «ковра» Серпинского (рис. 4, *c*). Фрактальная размерность губки Менгера $D \approx 2.7268$. Также существует фрактальная кривая Серпинского (рис. 5, *a*), кривая Минковского (рис. 5, *b*) и многие другие.

2. Применение фрактальной геометрии в теории антенн

Особое внимание следует уделить такому приложению фрактальной геометрии, как создание фрактальных антенн для передачи и приёма сигналов. Очевидно, принципиальное отличие таких антенн от традиционных заключается в их геометрии. По-другому этот класс устройств ещё называют «ломаными» антеннами. Благодаря численному моделированию и натурным экспериментам выявлено, что фрактальные антенны и антенны обычной формы имеют сравнимые коэффициенты усиления. Однако преимущество первых состоит в их компактности и малых габаритах, что оказывается важным для мобильных устройств. При этом успешно решается и проблема широкополосности. Можно использовать всего лишь одну фрактальную антенну, в то время как традиционных антенн нужно несколько для разных частотных диапазонов.

Интересно, что еще в 1980 годах были предложены логопериодические и спиральные конструкции, которые являлись неким прообразом современных фрактальных антенн, хотя в строгом математическом смысле на момент разработки такие структуры не были связаны с фрактальной геометрией [23, 24].

Согласно краткой исторической справке о создании фрактальных антенн из обзорной статьи [24] обычно упоминается работа 1986 года Я. Кима и Д. Джагарда [25]. Результаты тео-

ретических исследований возможности создания многополосной антенны за счёт фрактальной формы впервые были представлены в работах [26,27]. Как отмечается в работе [28], начало практической реализации фрактальных антенн положил инженер Н. Коэн [29] в 1995 году. «Чтобы обойти запрет бостонских властей устанавливать на домах наружные антенны, он замаскировал антенну своей радиостанции под декоративную фигуру, выполненную на основе фрактальной ломаной, описанной шведским математиком Хельге фон Кохом (Helge von Koch) в 1904 году» [24].

Итак, известны различные модификации фрактальных антенн на основе приведённой ранее кривой Коха (рис. 3, *a*) (см., например, [30–34]). Сравнение экспериментальных показателей для кривой Коха и для других периодических систем, например, спирали и меандра, подтвердило, что кривая Коха наилучшим образом подходит для многодиапазонных приложений [32]. Причём образующий треугольник не обязательно должен быть равносторонним с углом при основании в 60° , как привычно встречать в литературе. В работе [30] представлены результаты и для других значений указанного угла. Автор [30] показал, что при этом меняется фрактальная размерность антенны и, соответственно, её характеристики (внутреннее сопротивление на резонансной частоте, основная резонансная частота и т.п.).

В качестве примера приведём количественные характеристики для L-образной антенны [34] (рис. 6, *a*). Размеры такой антенны $12.33 \text{ мм} \times 10.16 \text{ мм}$ для мобильных устройств с частотой несущей 2.4 ГГц. При этом указанные размеры $\sim \lambda/10 \times \lambda/12$, где λ – длина волны на частоте несущей. Полоса пропускания 20%, КПД – 93%.

Кривая Пеано в исходном построении (см. рис. 1) не подходит для создания проволочной антенны из-за соприкасающихся участков. Поэтому в патенте [35] предложена следующая модификация (рис. 6, *b*). Но для изготовления щелей в стенках волновода и печатных фрактальных антенн исходный вид рис. 1 вполне приемлем.

Известны примеры фрактальных антенн, построенные на основе ломаной Минковского (см. рис. 5, *b*) и её модификациях (см., например, [35–39]). Как отмечено в [40], антенна, построенная на основе ломаной Минковского с прямоугольным шаблоном, на резонансной частоте 2.45 ГГц имеет более широкую полосу пропускания, нежели антенны, построенные на основе кривых Коха и Минковского, меньшие размеры и большее значение сопротивления [38].

В работах [41–44] содержатся сведения об антеннах на основе кривой Гильберта. Однако в [43] показано, что в случае запитывания антенны по краю снижается внутреннее сопротивление,

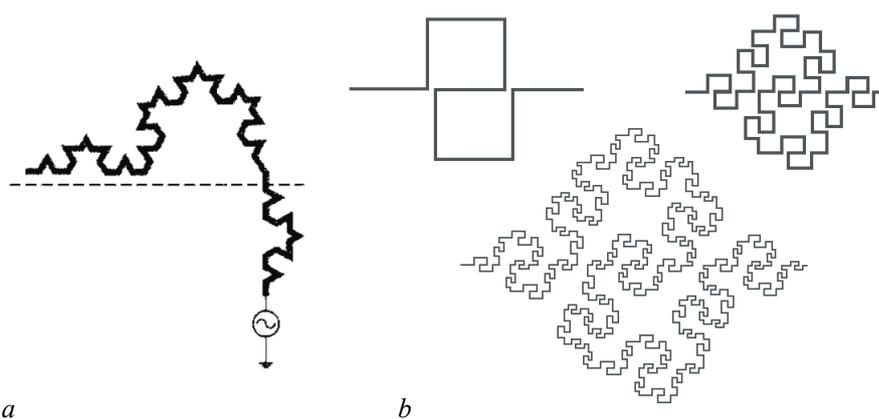


Рис. 6. *a* – L-образная антенна на основе кривой Коха с изгибом на 90° в точке, делящей сегмент как 2:1 [34]; *b* – модификация кривой Пеано для проволочной антенны [35]

Fig. 6. *a* – L-viewed transformed the Koch curve antenna with two-thirds length rotated 90° [34]; *b* – modification of the Peano curve for wire antenna [35]

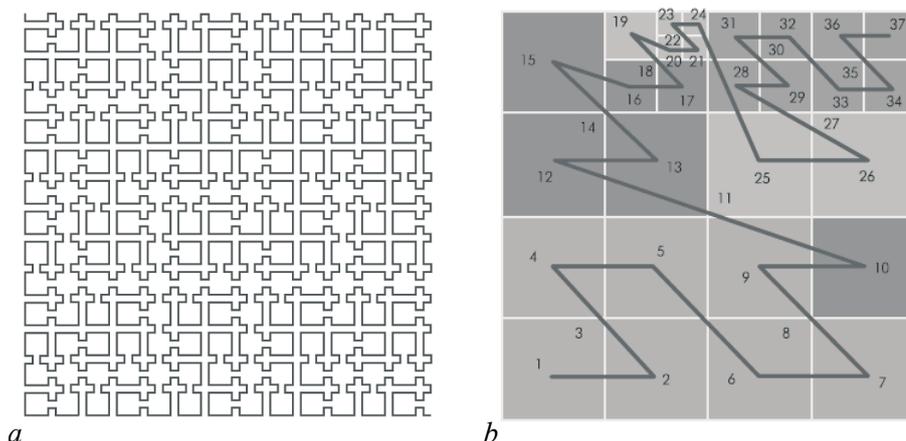


Рис. 7. *a* – Ломаная Осгуда [24, 45]; *b* – Фрактал Лебега [24, 46]

Fig. 7. *a* – Osgood curve [24, 45]; *b* – Lebesgue curve [24, 46]

и она по характеристикам (кпд, добротность, ширина полосы пропускания) уступает той, которая выполнена в виде меандра.

На рис. 7 приведено несколько интересных для теории антенн конфигураций, не все электродинамические свойства которых хорошо изучены на настоящий момент [20, 22, 30, 45, 46]. Причём, как указывалось в первом разделе, на основе тех же фрактальных объектов можно конструировать и плоские фигуры в виде фрактальных деревьев, и также перейти к их объемным аналогам, что остаётся справедливым для теории антенн [47].

Ещё раз следует сделать акцент на том, что при разработке антенн используются не полные фракталы, а лишь несколько итераций соответствующих построений. В литературе по теории фрактальных антенн их принято называть кривыми, заполняющими пространство или плоскость [30, 35, 48]. В некоторых случаях используется термин «префрактал».

Автор [40] отмечает, что в случае проволочных конструкций антенн допустимо пересечение лишь начального и конечного участков [35], то есть ни один из сегментов фрактальной антенны не может быть замкнутой кривой, хотя сама она, в целом, может являться таковой. Ещё накладываются ограничения на характерный размер сегментов – он должен быть менее десятой доли рабочей длины волны для рассматриваемой антенны в свободном пространстве; и на количество связанных участков – их должно быть более десяти штук. В качестве примера на рис. 8 приведены некоторые изображения реальных фрактальных антенн [49, 50]. Развёрнутый анализ и подробное описание многих видов антенн, исследование их параметров и диаграмм направленности представлены в главе 11 монографии [51].

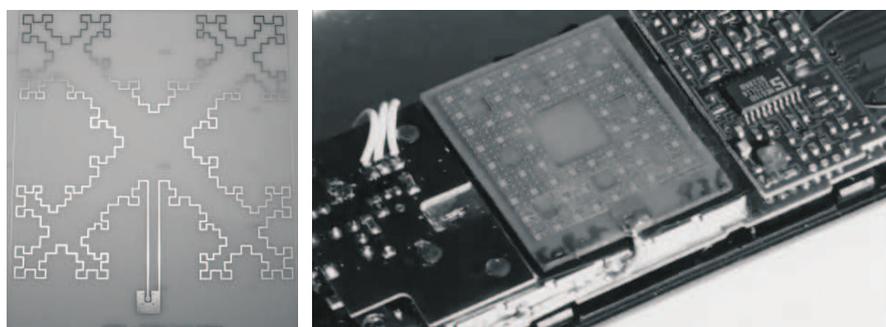


Рис. 8. Фрактальная антенна мобильных устройств [49, 50]

Fig. 8. Mobile Fractal Antenna [49, 50]

3. Квазифрактальные резонаторы

Использование принципов фрактальной геометрии открывает новые возможности и в СВЧ-электронике. В работе [52] сделан акцент на перспективах развития направления по созданию фрактальных радиосистем различного назначения. Показан метод анализа электродинамических свойств фрактальных антенн, который может быть успешно применён и при исследовании фрактальных магнетонных кристаллов, фрактальных экранов и других фрактальных частотно-избирательных поверхностей.

Особое внимание следует обратить на создание конструкций колебательных систем, нетрадиционных для СВЧ-электроники, – фрактальных резонаторов [52].

Имеющийся опыт применения фрактальных резонансных структур в СВЧ-антеннах повлиял на идею об исследовании характеристик новых типов двухззорных резонаторов с квазифрактальными элементами, которые могут быть использованы в конструкции многолучевых клистронов [53, 54] и клистронов [55, 56].

На настоящий момент клистроны применяются в бортовых и космических системах радиолокации, навигации, связи и др. [57]. Необходимость подобных исследований связана с переходом на новые частотные диапазоны и требованием дальнейшего увеличения мощности, повышения КПД, расширения полосы частот. При этом предпочтительным остаётся уменьшение массы и размеров прибора.

В работе [58] приведены результаты анализа резонансной системы, созданной на основе высокочастотной полосковой линии, центральный проводник которой выполнен в виде «треугольника Серпинского». Исследуемые квазифракталы относятся к классу древовидных. В упомянутых работах впервые описана методика построения внутренней конструкции двухззорного квазифрактального резонатора с использованием простых геометрических преобразований: отражение, вращение и подобие (рис. 9). Построенное фрактальное «дерево» (соответствует индуктивной части резонатора) помещалось внутри полого цилиндра, основаниями которого являлись две плоскости с пролётными отверстиями – двойными высокочастотными зазорами, число которых совпадает с количеством лучей многолучевого клистронов. По предположению авторов [58], следствием использования фрактальной формы резонансных элементов должно быть упомянутое уменьшение габаритов и облегчение реализации двухмодового режима взаимодействия с электронным потоком на кратных резонансных частотах.

На основе проведённых исследований авторы работ [53, 54, 59] пришли к выводу, что разработанный ими алгоритм построения многоканальных двухззорных квазифрактальных резонато-

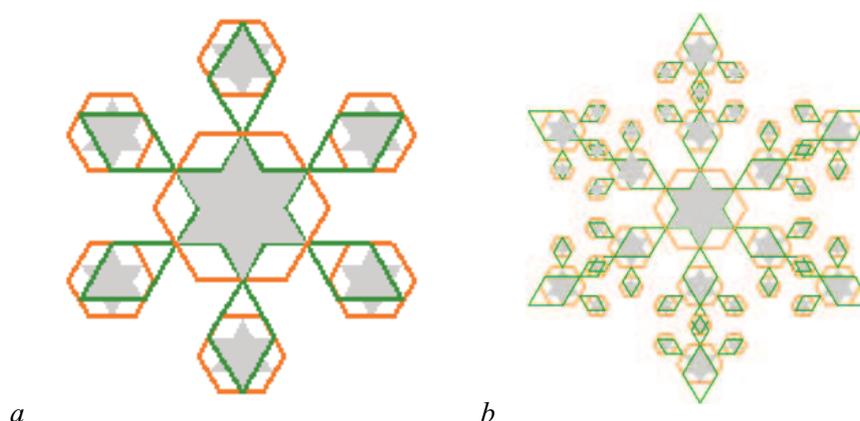


Рис. 9. *a* – Вторая итерация; *b* – пятая итерация [58]

Fig. 9. *a* – Second iteration; *b* – fifth iteration [58]

ров позволяет создать компактные мощные многолучевые клистроны, работающие в диапазоне частот от 2 до 4 ГГц. Выходная мощность такого 10-лучевого клистрона составляет 70...75 кВт, а предельное значение электронного КПД – 80%. При этом в резонаторной системе размещено шесть резонаторов. В работе [59] отмечается, что клистрон с такими характеристиками может быть использован в качестве источника СВЧ-энергии в ускорителях заряженных частиц и в установках СВЧ-нагрева. Проведённый сравнительный анализ с однолучевым клистроном-аналогом показал увеличение выходной мощности в 1.5 раза, повышение КПД на 4%, а также снижение ускоряющего напряжения в 2 раза.

В работе [56] представлены результаты численного моделирования режима работы двухзонарного фрактального резонатора многолучевого клистрода (рис. 10). Исследовано влияние неоднородности высокочастотного электрического поля на его электродинамические и электронные характеристики. В той же работе [56] авторы отмечают, что при расчётах этих параметров требуется высокая точность, поскольку фрактальные резонаторы имеют достаточно сложную геометрию, и распределение высокочастотного поля внутри является существенно неоднородным. Конструкция резонатора основывается на трёх соединённых древовидных фракталах Пифагора [60]. На основе проведённого анализа авторами [56] показано, что преимуществами клистрода с квазифрактальным резонатором являются более высокая долговечность (в 2–3 раза выше, чем у магнетронов) и возможность управления уровнем выходной мощности в широких пределах.

Вариант фрактальных взаимосвязанных СВЧ-резонаторов электромагнитных колебаний предложен в [61]. Он выполнен в виде диэлектрических трёхгранных односторонних поверхностей с металлическими обкладками, которые образуют кольцевую структуру (рис. 11). Замыкание происходит в виде поверхности Мёбиуса. Таким образом, в поперечном сечении имеется четыре трехфазные ёмкости, образованные плоскостями треугольных диэлектриков, а индуктивная часть формируется за счёт четырёх короткозамкнутых участков, каждый из которых имеет три витка благодаря идее применить поверхность Мёбиуса. С помощью такого устройства, как утверждают авторы [61], можно улучшить взаимосвязь электрических и магнитных полей в фрактальных резонаторах в режимах бегущей и стоячей волн. Подобная конструкция пригодна для резонаторов и фазовращателей СВЧ, предназначенных для генерации, преобразования и передачи сигналов некоторой частоты на базе цифровой активной фазированной антенной решётки.

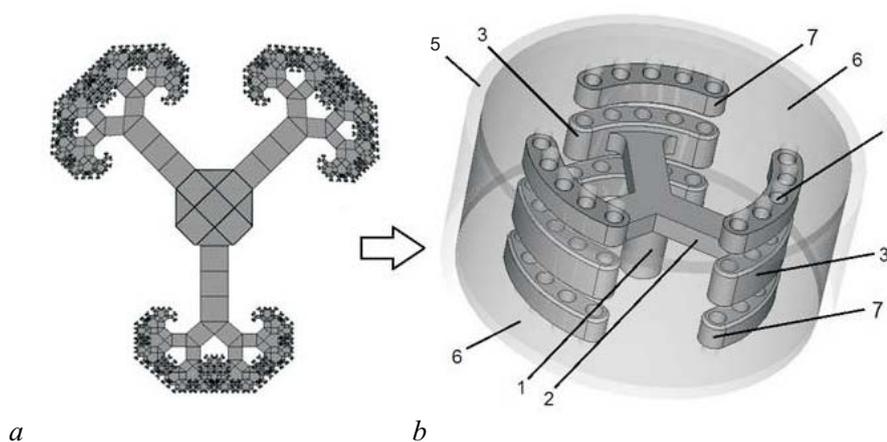


Рис. 10. *a* – Фрактал Пифагора; *b* – конструкция резонатора [56]: 1 – опорный проводник – «ствол», 2 – радиально направленные проводники – «ветки», 3 – центральные электроды – «листья», 4 – пролетные каналы, 5 – цилиндрический корпус резонатора, 6 – боковые крышки, 7 – пролетные трубы

Fig. 10. *a* – Pythagoras tree; *b* – resonator design [56]: 1 – central conductor – «trunk», 2 – radially directed conductors – «branches», 3 – central electrodes – «leaves», 4 – transit channels, 5 – cylindrical resonator body, 6 – side covers, 7 – transit pipes

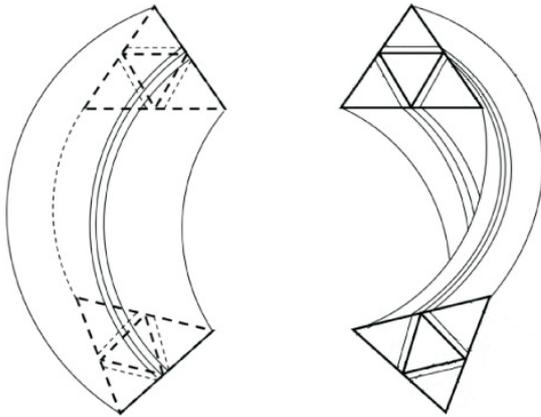


Рис. 11. Фрактальный резонатор в виде ленты Мёбиуса [61]

Fig. 11. Mobius strip fractal resonator [61]

Попытки усовершенствовать частотно-избирательные устройства в СВЧ-диапазоне привели к изучению фильтров на основе фрактальных резонаторов [62–65]. Например, в работе [66] рассматривается многомодовый квазифрактальный микрополосковый резонатор (модификация кривой Гильберта) и полосовые фильтры на его основе. Для исследуемой системы характерно наличие двух полос с центральными частотами 2.43 и 3.47 ГГц при потерях 0.38 и 2.53 дБ, соответственно. Были изготовлены также различные конфигурации фрактальных фильтров нижних частот [64]. Автор работ [64, 66] отмечает, что результаты экспериментов с изготовленными фильтрами хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

4. Фрактальные катоды

Одно из направлений развития вакуумной СВЧ микроэлектроники связано с созданием приборов с полевой эмиссией электронов [67]. Конструкция таких приборов, как правило, содержит автоэмиссионный катод (см., например, [68]), который характеризуется наличием эмитирующих острий, конусов, лезвий микронных размеров, что позволяет получить значительные напряжённости электрического поля при сравнительно низких значениях приложенного напряжения. Поэтому важной характеристикой таких катодов является коэффициент усиления электрического поля на остриях. Один путь повышения этого коэффициента связан с уменьшением толщины вершины острия (см., например, [69, 70]).

Другой способ предложен в работах [67, 71]. Идея заключается в формировании префрактальной поверхности с разного уровня ступенями (рис. 12): на выступах первой ступени расположены более мелкие выступы второй ступени, на которых, в свою очередь, могут располагаться более мелкие и т.д. На основе последовательного анализа автор [67] пришёл к заключению, что полный коэффициент усиления электрического поля на фрактальной многоступенчатой поверхности окажется равным произведению коэффициентов усиления для каждой отдельной ступени.

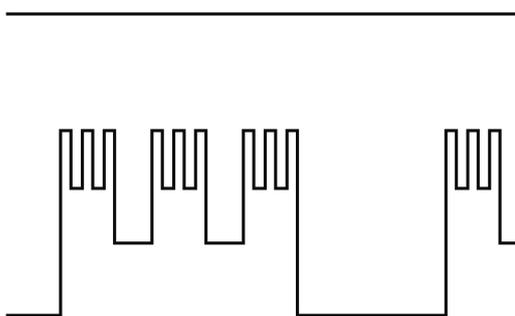


Рис. 12. Катод с фрактальной поверхностью [67]

Fig. 12. Fractal cathode [67]

Следует отметить, что полученные в [67, 71] соотношения для фрактальной эмиссионной поверхности полевых катодов позволили объяснить результаты некоторых более ранних экспериментов [72].

В рамках работы [73] была исследована автоэлектронная эмиссия с фрактальной поверхности, ограниченной множеством Жюлиа [3, 74]. Результаты анализа основных характеристик автоэлектронной эмиссии позволили авторам [73] заключить, что основная доля автоэмиссионного тока получена именно с мелкомасштабных самоподобных неоднород-

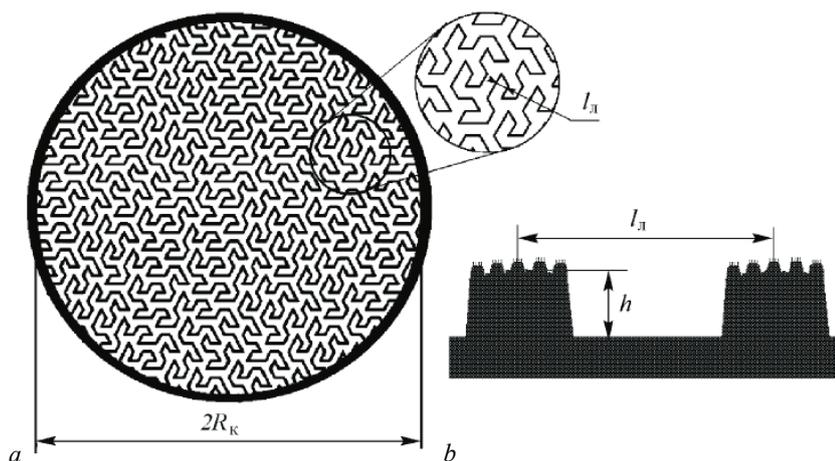


Рис. 13. *a* – Структура протяжённого лезвийного автоэммитера на основе кривых Пеано–Госпера; *b* – поперечное сечение фрагмента автоэммитера с учетом микроострий на гребне лезвия [76]

Fig. 13. *a* – Structure of extended blade autoemitter based on Peano–Gosper curves; *b* – cross-section of a fragment of autoemitter taking into account micropoints on a blade ridge [76]

ностей. Именно на этих участках происходит существенное усиление поля. Кроме того, выяснена связь фрактальной размерности поверхности и её эмиссионных свойств. Последнее, в свою очередь, может быть полезно при объяснении эмиссионных свойств целого ряда материалов со сложной структурой поверхности в микроскопическом масштабе.

В 1991 году Иидзима открыл углеродные структуры, известные сегодня как углеродные нанотрубки [75]. И с того момента опубликовано довольно много работ, посвящённых вопросам их применения и исследованию их свойств. Оказалось, что массив углеродных нанотрубок, выращенных на поверхности катода, успешно может применяться в качестве источника электронов в вакуумных приборах. Различные углеродные микро- и наноструктуры в последнее время приобретают всё больший практический интерес, что, в первую очередь, связано с рядом их преимуществ по сравнению с тугоплавкими металлами. Также представляется важным рассматривать их с точки зрения фрактальной геометрии, учитывая высокую степень сложности поверхности углеродных микроструктур.

Благодаря анализу автоэмиссионных свойств углеродных острийных и лезвийных катодов с помощью подходов фрактальной геометрии авторы [76] сформулировали технологически осуществимые требования, предъявляемые к устройству холодных источников электронов с заданными свойствами. Наиболее предпочтительной конфигурацией является углеродная фрактальная решётка лезвийного типа с протяжёнными границами, и в качестве варианта предложен углеродный автоэммитер лезвийного типа с развитой фрактальной поверхностью (рис. 13), построенный на основе фигуры Пеано–Госпера. Именно такая конфигурация соответствует наиболее эффективному низковольтному автоэммитеру с высоким значением эффективной площади эмиссии.

Результаты исследования фрактальных свойств объектов, состоящих из углеродных нанотрубок, представлены в монографиях [77, 78].

Заключение

Конечно, в приведённом обзоре рассмотрены далеко не все приложения фрактальной геометрии в радиофизике и электронике. В заключение обозначим еще несколько областей, в которых идеи и подходы теории фракталов могут дать определённые преимущества.

Предложен новый вид фрактальных сверхширокополосных сигналов [79]. Фрактальными называют такие сигналы, спектр или временная реализация которых имеют самоподобную структуру, задаваемую множеством Кантора [80]. Исследуя задачи о восстановлении и обнаружении таких сигналов на фоне шума, авторы [79] обозначили достоинства фрактальных сверхширокополосных сигналов – их избыточность и повышенную помехоустойчивость, а также возможность организации скрытой передачи данных, так как по форме такой сигнал может быть шумоподобным. В целом, с их преимуществами и недостатками можно ознакомиться в работе [79].

В Институте электромагнитных исследований (Харьков, Украина) впервые была разработана и успешно испытана помехозащищённая система двухканальной фрактальной связи [80]. Система пригодна как для передачи фрактальных видеосигналов по кабельным линиям, так и по эфиру, с использованием несущей, промодулированной сигналами с фрактальными спектрами разных видов. При этом исключается возможность несанкционированного доступа к передаваемой информации.

Известны попытки дополнить существующую модель лавинного пробоя p - n перехода за счёт учёта обнаруженных фрактальных свойств спектральных характеристик для микроплазменного шума в образцах светодиодов [81].

На настоящий момент в виде фрактальной фигуры создаются диффузоры для подавления вторичного излучения и вибраций от источников звуковоспроизводящей аппаратуры. Как указывает производитель [82], большую часть энергии нежелательных колебаний фрактальный диффузор рассеивает за счёт фрактальной формы.

Библиографический список

1. *Gulia G.* Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1918. Vol. 1. P. 47–245.
2. *Fatou P.* Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societe. Math. France. 1919. Vol. 47. P. 161–271.
3. *Мандельброт Б.* Фракталы и возрождение теории итераций // *Пайтген Х.-О., Рихтер П.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с. С. 131–140.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 350 с.
5. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
6. *Деменок С.Л.* Суперфрактал. Спб.: ООО «Страта», 2015. 196 с.
7. Арт-фрактал. Сборник статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. Спб.: ООО «Страта», 2015. 156 с.
8. *Розенберг Г.С., Чупрунов Е.В., Гелашивили Д.Б., Иудин Д.И.* У геометрии природы фрактальное лицо: Памяти Бенуа Мандельброта // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 1. С. 411–417.
9. *Пиньеро Г.* Шар бесконечного объёма. Парадоксы измерения. М.: ДеАгостини, 2014. 144 с.
10. *Макаренко Н.Г.* Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое // Научная сессия МИФИ-2002. IV Всероссийская НТК «Нейроинформатика-2002». Лекции по нейроинформатике. Часть 2. М.: МИФИ, 2002. С. 121–169.
11. *Valdivia J.A.* The Physics of High Altitude Lightning, Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1998.
12. *Дуран А.* Поэзия чисел. Прекрасное и математика. М.: ДеАгостини, 2014. 160 с.

13. Трубецков Д.И. Введение в синергетику: Хаос и структуры. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 240 с.
14. Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г. Фрактальная геометрия в лицах и судьбах // Известия вузов. ПНД. 2016. Т. 24, № 6. С. 4–38.
15. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Н.-Н.: Изд-во Нижегородского университета, 1999. 140 с.
16. Данилов Ю.А. Фрактальность // Прекрасный мир науки. Сб. статей памяти Ю.А. Данилова / Под ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с. С. 180–191.
17. Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane // Mathematische Annalen. 1890. Vol. 36, no. 1. P. 157–160.
18. Торонджадзе М., Бендукидзе А. Кривые Пеано // Квант. 1974. № 8. С. 13–16.
19. Hilbert D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück // Mathematische Annalen. 1891. Vol. 38, no. 3. P. 459–460.
20. Moore E.H. On certain crinkly curves // Transactions American Mathematical Society. 1900. No. 1. P. 72–90.
21. Koch H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire // Arkiv for Matematik. 1904. No. 1. P. 681–704.
22. Sierpinski W. Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane // Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. math. et nat., Série A). 1912. P. 462–478.
23. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 527 с.
24. Слюсар В. Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных антенн» // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 5. С. 78–83.
25. Kim Y., Jaggard D.L. The fractal random array // Proc. of IEEE. 1986. Vol. 74, no. 9. P. 1278–1280.
26. Puente-Baliarda C. Fractal Design of Multiband Antenna Arrays. Elec. Eng. Dept. Univ. Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project, Dec.1993.
27. Puente C., Pous R. Diseco fractal de agrupaciones de antenas // IX Simposium Nacional URSI, Las Palmas. 1994. Vol. I. P. 227–231.
28. Yang X., Chiochetti J., Papadopoulos D., Susman L. Fractal antenna elements and arrays // Applied Microwave & Wireless. 1999. P. 34–46.
29. Cohen N. Fractal Antennas: Part 1 // Communications Quarterly, Summer 1995. P. 7–22.
30. Vinoy K.J. Fractal Shaped Antenna Elements for Wide and Multi-band Wireless Applications. Thesis of PhD Dissertation. Pennsylvania State University. 2002. 169 p.
31. Vinoy K.J., Abraham J.K., Varadan, V.K. Reply to comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves» // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2004. Vol. 52, iss. 6. P. 1627–1628.
32. Best S.R. The Koch fractal monopole antenna: The significance of fractal geometry in determining antenna performance // Proceedings of the 2001 Antenna Applications Symposium. Allerton Park Monticello, Illinois. 2001.
33. Gonzalez-Arbesu J.M., Rius J.M., Romeu J. Comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves» // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2004. Vol. 52, iss. 6. P. 1626–1627.
34. Tsachtsiris G., Soras C., Karaboikis M., Makios V. A printed folded Koch monopole antenna for wireless devices // Microwave and Optical Technology Letters. 2004. Vol. 40, no. 5. P. 374–378.

35. *Puente-Baliarda C., Rozan E., Jean L., Anguera Pros J.* WO Patent № 01/54225 A1. International Patent Classification 7 H01Q 1/36. Space-Filling Miniature Antennas. July 26, 2001.
36. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V.* Four-element printed monopole antenna systems for diversity and MIMO terminal devices // Proceedings of the 17th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications. Dubrovnik. Oct.1–3, 2003. P. 193–196.
37. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V.* Three-branch antenna diversity systems on wireless devices using various printed monopoles // 2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Istanbul. May 11–16, 2003.
38. *Tsachtsiris G., Karaboikis M., Soras C., Makios V.* A novel fractal rectangular curve printed monopole antenna for portable terminals // URSI International Symposium on Electromagnetic Theory. Pisa, Italy, May 23–27, 2004.
39. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Papamichael V., Makios V.* Multi Element Antenna Systems for Diversity and MIMO Terminal Devices // Laboratory of Electromagnetics. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Patras. Patras, Greece. 2004.
40. *Слюсар В.* Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных антенн». Часть 2 // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 6. С. 82–89.
41. *Gonzalez-Arbesu J. M., Blanch S., Romeu J.* The Hilbert curve as a small self-resonant monopole from a practical point of view // Microwave and Optical Technology Letters. 2003. Vol. 39, no. 1. P. 45–49.
42. *Zhu J., Hoorfar A., Engheta N.* Bandwidth, cross-polarization, and feed-point characteristics of matched Hilbert antennas // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2003. Vol. 2. P. 2–5.
43. *Anguera J., Puente C., Martinez E., Rozan E.* The fractal Hilbert monopole: A two-dimensional wire // Microwave and Optical Technology Letters. 2003. Vol. 36, no. 2. P. 102–104.
44. *Soler C.J., Anguera Pros J., Puente-Baliarda C., Borja Borau C.* WO Patent № 04/042868. International Patent Classification 7 H01Q 1/38. Integrated Circuit Package Including Miniature Antenna. 21.05.2004.
45. Lindenmayer systemer. URL: <https://allenpike.com/modeling-plants-with-l-systems/> (дата обращения: 19.12.2019).
46. Adaptive mesh refinement. Part I. Lecture slides // University of Illinois at Urbana-Champaign. Astronomy 496CAC. Computational Astrophysics and Cosmology. Spring 2003.
47. *Слюсар В.И.* Фрактальные антенны // *Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005. 592 с. С. 529–542.
48. *Sagan H.* Space-Filling Curves. Springer-Verlag, New York, 1994. 193 p.
49. Fractal antenna experiment. URL: http://www.m0wwa.co.uk/page/M0WWA_fractal_antenna.html (дата обращения: 19.12.2019).
50. Фракталы и GUI. URL: <https://habr.com/ru/company/intel/blog/92064/> (дата обращения: 19.12.2019).
51. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
52. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Давыдов А.Г.* О проектировании фрактальных радиосистем. Численный анализ электродинамических свойств фрактальной антенны Серпинского // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 9. С. 1070–1076.

53. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Новый класс квазифрактальных двухззорных резонаторов для многолучевых клистронов // Радиотехника. 2016. № 7. С. 87–91.
54. *Нестеров Д.А., Царев В.А., Мучкаев В.Ю.* Моделирование процесса взаимодействия многолучевого электронного потока с СВЧ-полем в квазифрактальном двухззорном выходном резонаторе клистрона // Радиотехника. 2017. № 7. С. 31–36.
55. *Мирошниченко А.Ю., Царев В.А., Корчагин А.И.* Двухззорные резонаторы фрактального типа // Антенны. 2011. № 11 (174). С. 63–67.
56. *Царев В.А., Корчагин А.И., Мирошниченко А.Ю.* Исследование режима двухмодового взаимодействия полей фрактального двухззорного резонатора с электронами в многолучевом клистроде // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 12. С. 9–12.
57. *Gelvich E.A., Borisov L.M., Pugnini V.I. et al.* A new generation of power klystrons on the base of multiple-beam design // Int. Microwave Symp. Dig. USA. 1991. Vol. 3. P. 1319–1320.
58. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Оптимизация параметров двухмодовых квазифрактальных двухззорных резонаторов для мощных многолучевых клистронов, работающих на частоте 2.45 ГГц // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2016: Материалы 12 междунар. науч.-техн. конф., Саратов, 2016. Т. 1. С. 349–358.
59. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Перспективы применения двухззорных квазифрактальных резонаторов в мощных многолучевых клистропах с предельно высоким КПД // Сборник трудов III Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы СВЧ электроники им. В.А.Солнцева 2017». Москва, 2017. С. 7–9.
60. *Тихоплаов В.Ю., Тихоплаов Т.С.* Гармония хаоса, или Фрактальная реальность. СПб.: Весь, 2003. 340 с.
61. Патент. URL: findpatent.ru/patent/269/2690693.html (дата обращения: 19.12.2019).
62. *Ye C.S., Su Y.K., Weng M.H., Wu H.W.* Resonant properties of the Sierpinski-based fractal resonator and its application on low-loss miniaturized dual mode bandpass filter // Microwave and Optical Technology Letters. 2009. Vol. 51, no. 5. P. 1358–1361.
63. *Jarry P., Beneat J.* Design and Realizations of Miniaturized Fractal Microwave and RF Filters. Hoboken: J. Wiley & Sons: IEEE Press, 2009. 194 p.
64. *Zemlyakov K., Crnojevic-Bengin V.* Planar low-pass filters based on Hilbert fractal // Microwave and Optical Technology Letters. 2012. Vol. 54, iss. 11. P. 2577–2581.
65. *Crnojevic-Bengin V., Zemlyakov K., Jankovic N., Vendik I.* Dual-band bandpass filters based on dual-mode Hilbert fractal resonator // Microwave and Optical Technology Letters. 2013. Vol. 55, iss. 7. P. 1440–1443.
66. *Земляков К.Н.* Исследование и разработка фильтров СВЧ на многомодовых резонаторах: автореферат дис.... к.т.н., Санкт-Петербург, 2013.
67. *Солнцев В.А.* Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах // Известия вузов. ПНД. 1998. Т. 6, № 1. С. 54.
68. *Трубецков Д.И., Краснова Г.М.* О современном состоянии сверхвысокочастотных вакуумных электронных и микроэлектронных приборов с управляемой эмиссией // Известия вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 1. С. 35–66.
69. *Солнцев В.А., Галдецкий А.В., Клеев А.И.* Приборы вакуумной СВЧ микроэлектроники со средним углом пролёта // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я школа-семинар. Кн. 1. Т.1. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 76.
70. *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В.* Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.

71. *Solntsev V.A.* The electric field gain in the cathode with fractal multistep surface // 10th Int. Vacuum Microelectronics Conf. Kyongju, Korea, August 17–21, 1997. P. 730.
72. *Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. and et al.* Emission of low-voltage multi-tip carbon matrices coated by carbon clusters // 9th Int. Vacuum Microelectronics Conf. St. Petersburg, Russia, July 7–12, 1996. P. 519.
73. *Исаева О.Б., Елисеев М.В., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М.* Моделирование автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности // Известия вузов. ПНД. 1999. Т. 7, № 5. С. 33–43.
74. *Дьюдни А.К.* Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа // В мире науки. 1988. № 1. С. 88–92.
75. *Iijima S.* Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. 1991. Vol. 354. P. 56–58.
76. *Гуляев Ю.В., Григорьев Ю.А., Король В.Н., Рехен Г.А.* Исследование автоэмиссионных характеристик фрактальных углеродных структур // Известия вузов. ПНД. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 88–99.
77. *Мищенко С.В., Ткачев А.Г.* Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение. М.: Машиностроение, 2008. 320 с.
78. *Дьячков П.Н.* Углеродные нанотрубки: Строение, свойства, применения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
79. *Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф.* Фрактальные сверхширокополосные сигналы // Радиофизика и радиоастрономия. 2005. Т. 10, № 1. С. 62–84.
80. *Болотов В.Н., Ткач Ю.В.* Фрактальная система связи // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 9. С. 91–95.
81. *Шапкина А.С., Кривошейкин А.В., Скворцов Н.Н., Воротков М.В.* Фрактальные свойства лавинного пробоя светодиода // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2016. № 4 (253). С. 85–93.
82. Фрактальный диффузор. URL: <https://www.cold-ray.ru/catalog?currentProduct=25838> (дата обращения: 19.12.2019).

References

1. *Gulia G.* Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1918, vol. 1, pp. 47–245.
2. *Fatou P.* Sur les Equations Fonctionnelles. *Bulletin Societe. Math. France*. 1919, vol. 47, pp. 161–271.
3. *Mandelbrot B.* Fractals and the Rebirth of Iteration Theory, pp. 151–160. In: *Peitgen H.-O., Richter P.H.* The Beauty of Fractals. Berlin, Springer. 1986. 199 p.
4. *Crownover R.M.* Introduction to Fractals and Chaos. Boston–London, Jones and Bartlett Publishers, 1995. 306 p.
5. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman and Company, 1983. 468 p.
6. *Demenok S.L.* Superfractal. Saint Petersburg: Strata, 2015, 196 p. (in Russian).
7. Art-fractal. Collections of articles. Transl. from eng., fr. by E.B. Nikolaeva. Saint Petersburg: Strata, 2015, 156 p. (in Russian).
8. *Rozenberg G.S., Chuprunov E.V., Gelashvili D.B., Iudin D.I.* Nature's geometry has a fractal face. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, № 1, pp. 411–417 (in Russian).
9. *Pineiro G.* The Sphere that Wanted to be Infinite: The Paradoxes of Measurement. Barcelona, RBA Coleccionables, 2017, 141 p.

10. Makarenko N.G. Fractals, attractors, neural networks and all that. Scientific session MEPHI – 2002. The 4th Russian Scientific Technical Conference «Neuroinformatics – 2002». Lectures on Neuroinformatics. Part 2. Moscow, MEPHI, 2002, pp. 121–169 (in Russian).
11. Valdivia J.A. The Physics of High Altitude Lightning, Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1998.
12. Duran A.J. The Poetry of Numbers. Revealing Beauty in Maths. Navarra, RBA Coleccionables, 2010, 151 p.
13. Trubetskov D.I. Introduction to Synergetics: Chaos and Structures. Moscow, URSS LIBROKOM, 2014, 240 p. (in Russian).
14. Trubetskov D.I., Trubetskova E.G. Fractal geometry. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 6, pp. 4–38 (in Russian).
15. Morozov A.D. Introduction to the Fractal Theory. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University, 1999, 140 p. (in Russian).
16. Danilov Iu.A. Fractality. In: The Wonderful World of Science. To the Memory of Iu.A. Danilov. Eds V.I. Saniuk, D.I. Trubetskov. Moscow, Progress-Traditsiia, 2008, 384 p. P. 180–191 (in Russian).
17. Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 1890, vol. 36, no. 1, pp. 157–160.
18. Torondzhadze M., Bendukidze A. Peano Curves. *Kvant*, 1974, no. 8, pp. 13–16 (in Russian).
19. Hilbert D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*, 1891, vol. 38, no. 3, pp. 459–460.
20. Moore E.H. On certain crinkly curves. *Transactions American Mathematical Society*, 1900, no. 1, pp. 72–90.
21. Koch H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire. *Arkiv for Matematik*, 1904, no. 1, pp. 681–704.
22. Sierpinski W. Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane. *Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. Math. et Nat., Série A)*, 1912, pp. 462–478.
23. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. New York: W.H. Freeman and Company, 1991, 429 p.
24. Slusar V. Fractal antennas. A fundamentally new type of «broken» antennas. *Electronics: Science, Technology, Business*, 2007, no. 5, pp. 78–83 (in Russian).
25. Kim Y., Jaggard D.L. The fractal random array. *Proc. of the IEEE*, 1986, vol. 74, no. 9, pp. 1278–1280.
26. Puente-Baliarda C. Fractal Design of Multiband Antenna Arrays. *Elec. Eng. Dept. Univ. Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project*, Dec. 1993.
27. Puente C., Pous R. Diseco Fractal de Agrupaciones de Antenas. *IX Simposium Nacional URSI, Las Palmas*, 1994, vol. I, pp. 227–231.
28. Yang X., Chiochetti J., Papadopoulos D., Susman L. Fractal antenna elements and arrays. *Applied Microwave & Wireless*, 1999, pp. 34–46.
29. Cohen N. Fractal Antennas: Part 1. *Communications Quarterly*, Summer 1995, pp. 7–22.
30. Vinoy K.J. Fractal Shaped Antenna Elements for Wideband Multi-band Wireless Applications. Thesis of PhD Dissertation. The Pennsylvania State University, 2002, 169 p.
31. Vinoy K.J., Abraham J.K., Varadan, V.K. Reply to comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, vol. 52, iss. 6, pp. 1627–1628.
32. Best S.R. The Koch fractal monopole antenna: The significance of fractal geometry in determi-

- ning antenna performance. *Proceedings of the 2001 Antenna Applications Symposium*. Allerton Park Monticello, Illinois, 2001.
33. Gonzalez-Arbesu J.M., Rius J.M., Romeu J. Comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, vol. 52, iss. 6, pp. 1626–1627.
 34. Tsachtsiris G., Soras C., Karaboikis M., Makios V. A printed folded Koch monopole antenna for wireless devices. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 374–378.
 35. Puente-Baliarda C., Rozan E., Jean L., Anguera Pros J. WO Patent № 01/54225 A1. International Patent Classification7 H01Q 1/36. Space-Filling Miniature Antennas. July 26, 2001.
 36. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V. Four-element printed monopole antenna systems for diversity and MIMO terminal devices. *Proceedings of the 17th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications*, Dubrovnik, Oct. 1–3, 2003, pp. 193–196.
 37. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V. Three-branch antenna diversity systems on wireless devices using various printed monopoles. *2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Istanbul, May 11–16, 2003.
 38. Tsachtsiris G., Karaboikis M., Soras C., Makios V. A novel fractal rectangular curve printed monopole antenna for portable terminals. *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*, Pisa, Italy, May 23–27, 2004.
 39. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Papamichael V., Makios V. Multi element antenna systems for diversity and MIMO terminal devices. Laboratory of Electromagnetics. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Patras. Patras, Greece, 2004.
 40. Slusar V. Fractal antennas. A fundamentally new type of «broken antennas». Part 2. *Electronics: Science, Technology, Business*, 2007, no. 6, pp. 82–89. (in Russian).
 41. Gonzalez-Arbesu J.M., Blanch S., Romeu J. The Hilbert curve as a small self-resonant monopole from a practical point of view. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 45–49.
 42. Zhu J., Hoorfar A., Engheta N. Bandwidth, cross-polarization, and feed-point characteristics of matched Hilbert antennas. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2003, vol. 2, pp. 2–5.
 43. Anguera J., Puente C., Martinez E., Rozan E. The fractal Hilbert monopole: A two-dimensional wire. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2003, vol. 36, no. 2, pp. 102–104.
 44. Soler C.J., Anguera Pros J., Puente-Baliarda C., Borja Borau C. WO Patent № 04/042868. International Patent Classification7 H01Q 1/38. Integrated Circuit Package Including Miniature Antenna. 21.05.2004.
 45. Lindenmayer systemer. URL: <https://allenpike.com/modeling-plants-with-l-systems/> (accessed 19 December 2019).
 46. Adaptive Mesh Refinement. Part I. Lecture slides. *University of Illinois at Urbana-Champaign. Astronomy 496CAC. Computational Astrophysics and Cosmology*, Spring 2003.
 47. Slusar V. Fractal antennas. Vishnevskii V.M., Liakhov A.I., Portnoi S.L., Shakhnovich I.V. *Broadband Wireless Networks*. Moscow, Tekhnosfera, 2005, 592 p. P. 529–542 (in Russian).
 48. Sagan H. *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag: New York, 1994. 193 p.
 49. Fractal antenna experiment. URL: http://www.m0wwa.co.uk/page/M0WWA_fractal_antenna.html (accessed 19 December 2019).
 50. Fractals and GUI . URL: <https://habr.com/ru/company/intel/blog/92064/> (accessed 19 December 2019).
 51. Potapov A.A. *Fractals in Radiophysics and Radar: Sampling Topology*. Moscow, Universitetskaia Kniga, 2005, 848 p. (in Russian).

52. Gulyaev Yu. V., Nikitov S.A., Potapov A.A., Davydov A.G. Design of fractal radio systems: Numerical analysis of electromagnetic properties of the Sierpinski fractal antenna. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2005, vol. 50, no. 9, pp. 988–993.
53. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Novel quasi-fractal double-gap multi-beam klystron cavity class. *Radioengineering*, 2016, no. 7, pp. 87–91 (in Russian).
54. Nesterov D.A., Tsarev V.A., Muchkaev V.Yu. Modeling the interaction of multi-beam electron stream with the microwave field in the output quasi-fractal double-gap resonator of klystron. *Radioengineering*, 2017, no. 7, pp. 31–36. (in Russian).
55. Miroshnichenko A.Yu., Tsarev V.A., Korchagin A.I. Double-gap fractal type cavities. *Antennas*, 2011, no. 11 (174), pp. 63–67 (in Russian).
56. Tsarev V.A., Korchagin A.I., Miroshnichenko A.Yu. Investigation of the two-mode interacting fields fractal two-gaps cavity with electrons in the multiple-beam klystrode. *Journal of Radio Electronics*, 2012, no. 12, pp. 9–12 (in Russian).
57. Gelvich E.A., Borisov L.M., Pugnin V.I. et al. A new generation of power klystrons on the base of multiple-beam design. *Int. Microwave Symp. Dig. USA*, 1991, vol. 3, pp. 1319–1320.
58. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Optimization of parameters dual mode quasi-fractal double-gap cavities for high-power multi-beam klystrons, operating at a frequency of 2.45 GHz. *Proceedings of International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering, 2016, Saratov, September 22–23, 2016*, vol. 1, pp. 349–358.
59. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Prospects for the use of double-gap quasifractal resonators in high-power multipath klystrons with extremely high efficiency *Proceedings of the III Russian Scientific and Technical Conference «Problems of Microwave Electronics V.A. Solntseva 2017»*, Moscow, 2017, pp. 7–9 (in Russian).
60. Tikhoplavov V.Iu., Tikhoplavov T.S. *Harmony of Chaos, or Fractal Reality*. Saint Petersburg, Ves, 2003, 340 p. (in Russian).
61. Patent. URL: findpatent.ru/patent/269/2690693.html (accessed 19 December 2019) (in Russian).
62. Ye C.S., Su Y.K., Weng M.H., Wu H.W. Resonant properties of the Sierpinski-based fractal resonator and its application on low-loss miniaturized dual mode bandpass filter. *Microwave Opt. Tech. Letters*, 2009, vol. 51, no. 5, pp. 1358–1361.
63. Jarry P., Beneat J. *Design and Realizations of Miniaturized Fractal Microwave and RF Filters*. Hoboken: J. Wiley & Sons: IEEE Press, 2009. 194 p.
64. Zemlyakov K., Crnojevic-Bengin V. Planar low-pass filters based on Hilbert fractal. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2012, vol. 54, iss. 11, pp. 2577–2581.
65. Crnojevic-Bengin V., Zemlyakov K., Jankovic N., Vendik I. Dual-band bandpass filters based on dual-mode Hilbert fractal resonator. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2013, vol. 55, iss. 7, pp. 1440–1443.
66. Zemliakov K.N. *Research and Development of Microwave Filters on Multimode Resonators*. Ph.D. Dissertation, Saint Petersburg, 2013 (in Russian).
67. Solntsev V.A. Nonlinear phenomena in vacuum microelectronic structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 6, no. 1, p. 54 (in Russian).
68. Trubetskov D.I., Krasnova G.M. About current state high frequency vacuum electronic and microelectronic devices with field emission. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 35–66 (in Russian).
69. Solntsev V.A., Galdetskii A.V., Kleev A.I. Vacuum microwave microelectronics with an average

- angle of flight. *Lectures on Microwave Electronics and Radiophysics. 10 School-seminar*. Vol. 1. Saratov, «Kolledzh», 1996, p. 76 (in Russian).
70. Trubetskov D.I., Rozhnev A.G., Sokolov D.V. Lectures on microelectronics. Saratov: «Kolledzh», 1996 (in Russian).
 71. Solntsev V.A. The electric field gain in the cathode with fractal multistep surface. *10th Int. Vacuum Microelectronics Conf.* Kyongju, Korea, August 17–21, 1997, pp. 730.
 72. Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. and et al. Emission of low-voltage multi-tip carbon matrices coated by carbon clusters. *9th Int. Vacuum Microelectronics Conf. St. Petersburg, Russia*, July 7–12, 1996, pp. 519.
 73. Isaeva O.B., Eliseev M.V., Rozhnev A.G., Ryskin N.M. Simulation of field emission from fractal surface. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 1999, vol. 7, no. 5, pp. 33–43 (in Russian).
 74. D’iudni A.K. The Mandelbrot set and its related Julia sets. *In the World of Science*, 1988, no. 1, pp. 88–92 (in Russian).
 75. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 1991, vol. 354, pp. 56–58.
 76. Gulyaev Yu.V., Grigoriev Yu.A., Korol V.N., Rehen G.A. Research of the field emission of fractal carbon structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 1–2, pp. 88–99 (in Russian).
 77. Mishchenko S.V., Tkachev A.G. Carbon Nanomaterials. Production, Properties, Application. Moscow, Mashinostroenie, 2008, 320 p. (in Russian).
 78. D’iachkov P.N. Carbon Nanotubes: Structure, Properties, Applications. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii, 2006 (in Russian).
 79. Lazorenko O.V., Chernogor L.F. Fractal ultra-wideband signals. *Radio Physics and Radio Astronomy*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 62–84.
 80. Bolotov V.N., Tkach Y.V. Fractal Communication system. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 53, no. 9, pp. 1192–1196.
 81. Shashkina A.S., Krivosheikin A.V., Skvortsov N.N., Vorotkov M.V. Fractal properties of LED avalanche breakdown. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2016. no. 4 (253), pp. 85–93 (in Russian).
 82. Fractal diffuser
URL: <https://www.cold-ray.ru/catalog?currentProduct=25838> (accessed 19 December 2019) (in Russian).



Вдовина Галина Михайловна – родилась в 1989 году. Окончила Саратовский государственный университет (2011). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики. Принимала участие в таких конференциях, как «Волновые явления в неоднородных средах», «Физика и применение микроволн», «Проблемы СВЧ-электроники» и в Международной юбилейной зимней школе-семинаре по электронике СВЧ и радиофизике и др. Научные интересы – вакуумная электроника сверхвысоких частот, теория колебаний, история науки. Автор 10 статей в реферируемых журналах списка ВАК.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 Россия, 410033 Саратов, Панфилова, 1
 АО «НПП «Алмаз»
 E-mail: vdovinagm@gmail.com